Vendredi 5 décembre 2008 T°S

DEVOIR de Mathématiques (4h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(5 points)*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$a = -1 + 2i$, $b = 1 + 3i$, $c = 4i$.

1°) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2°) Soit I le milieu de [BC] et z_I son affixe.

a) Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-z_I}{z-a}$ soit un réel ?

b) Déterminer l'unique réel x tel que $\dfrac{x-z_I}{x-a}$ soit un réel.

c) Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$, donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.

3°) a) Soit G le point d'affixe -3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.

b) Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.

Déterminer l'écriture complexe de r_1.

4°) Soient A', B' et C' les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.

Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC?

En déduire que $b' = \overline{c'}$.

Exercice 2 *(5 points)* *Elèves suivant la Spécialité Physiques ou S.V.T.*

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n+1}{4} \end{cases}$$

1°) Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part et v_1, v_2, v_3 d'autre part.

2°) Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm), tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.

Utiliser (D) et (Δ) pour construire sur l'axe des abscisses, les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 ainsi que les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3.

3°) On considère la suite (s_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$s_n = u_n + v_n$.

a) Calculer s_0, s_1, s_2, s_3. A partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?

b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (s_n) est une suite constante.

4°) On considère la suite (d_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$d_n = u_n - v_n$.

a) Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique.

b) Donner l'expression de d_n en fonction de n.

5°) En utilisant les résultats des questions 3.b) et 4.b), donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

6°) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent. Préciser leurs limites.

Exercice 2 *(5 points)* <u>*Elèves suivant la Spécialité Mathématiques*</u>

1°) Calculer le PGCD de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.
Soit u la suite numérique définie par :

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

2°) Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u.
3°) a) Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
En déduire, pour tout entier naturel n, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

4°) Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

a) Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
c) Déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

Exercice 3 *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = 8 \sin^3 x$.
Le but de l'exercice est de déterminer, par deux méthodes différentes, une primitive de f sur **R**.

1°) Justifier l'existence d'une primitive de f sur **R**.

2°) 1ère méthode
a) Développer dans **C**, pour tout réel x : $(e^{ix} - e^{-ix})^3$
b) En déduire que, pour tout réel x : $f(x) = 6 \sin x - 2 \sin 3x$.
c) Déterminer une primitive F_1 de f sur **R**.

3°) 2ème méthode
a) Démontrer que, pour tout réel x : $f(x) = 8 \sin x - 8 \cos^2 x \sin x$.
b) Déterminer la fonction dérivée de la fonction h définie sur **R** par : $h(x) = \cos^3 x$.
c) En déduire une primitive F_2 de f sur **R**.

4°) Calculer $F_1(0)$ et $F_2(0)$, que peut-on en déduire ?

5°) En adaptant la méthode de votre choix, déterminer la primitive de la fonction $g : x \mapsto 8 \cos^3 x$ sur **R** qui s'annule en $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 4 *(5 points)*

Partie A

Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

1°) Etudier les variations de g.
2°) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune d'elles.
3°) En déduire le signe de $g(x)$ sur **R** en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty ; -1[\cup[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x+1}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal
(le tracé n'est pas demandé)

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire l'existence d'une droite asymptote à C_f.
2°) Etudier la dérivabilité de f sur D_f.
3°) Démontrer que, pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)\sqrt{x^4 - 1}}$.

4°) En déduire les variations de f.

5°) Question à chercher à la maison
(*Cette question n'entre pas en compte dans le barème du devoir*)
Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.