mai 2003 $1^{ère}$S

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1

ABC est un triangle, on note α, β, γ les mesures en radians des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ et on pose a = BC, b = CA, c = AB.

1°) a) Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = AB^2$

b) En déduire que : $c = a.\cos\beta + b.\cos\alpha$.

2°) Dans cette question, on suppose que $\beta = 2\alpha$.

a) Démontrer que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$

b) En utilisant la formule des sinus : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$, démontrer que $\cos\alpha = \dfrac{b}{2a}$.

c) En déduire que : $b^2 - a^2 = ac$.

Exercice 2

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3. Soit I le milieu de [AB] et J celui de [IC].
Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 66$.
On se propose de déterminer la nature de l'ensemble (E) de deux façons.

$1^{ère}$ méthode

1°) Montrer que $B \in (E)$.

2°) En utilisant deux fois le théorème de la médiane, démonter que :

$$M \in (E) \text{ si et seulement si : } 4MJ^2 + \frac{1}{2}AB^2 + IC^2 = 66.$$

3°) En déduire la nature et les éléments caractéristique de (E) et le représenter.

$2^{ème}$ méthode

On utilise le repère orthonormal $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$.

1°) Déterminer une équation de (E) dans ce repère.

2°) Retrouver le résultat de la première méthode.

Exercice 3

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

1°) On pose, pour tout entier n, $w_n = v_n - u_n$.

a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer w_n en fonction de n et déterminer sa limite.

2°) a) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de w_n, en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

b) Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

3°) On pose, pour tout entier n, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante que l'on précisera.

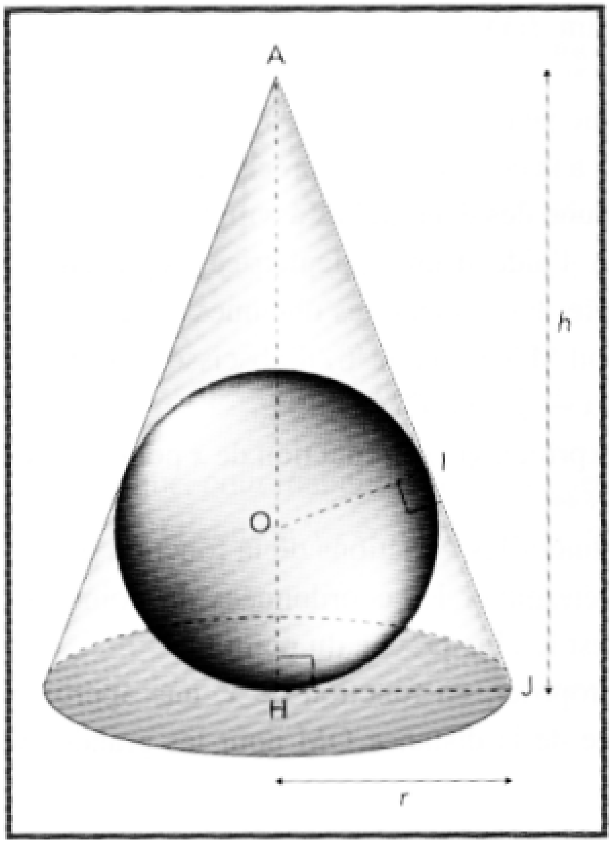
4°) A l'aide des résultats des questions **1** et **3**, et en résolvant un système d'équations, déterminer l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

5°) Déterminer la limite de ces deux suites.

…/…

Exercice 4

On a représenté ci-dessous une sphère de rayon 1 et C un cône de hauteur h et de rayon r, circonscrit à la sphère.
Les points A, O, I, H et J sont coplanaires, les droites (OI) et (AJ) sont perpendiculaires, de même que les droites (HJ) et (AH).



1°) Justifier que $h > 2$.

2°) a) Démontrer que $r^2 = \dfrac{h}{h-2}$ (on pourra utiliser des triangles semblables ou un calcul de tangente dans deux triangles rectangles)

b) Soit V(h) le volume du cône. Exprimer V(h) en fonction de h.

3°) Soit f la fonction définie sur I =]2 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$

a) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

b) Etudier les limites de f aux bornes de I.

c) Démontrer que C_f possède deux asymptotes (d) et (d') (préciser une équation de chacune d'elles).

d) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

e) En déduire que f possède sur I un minimum.

f) Tracer C_f.

4°) En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer la valeur de h pour laquelle le volume V(h) du cône est minimal.

Barème possible :

Ex 1 : 3 *points* - **Ex 2 :** 4,5 *points* - **Ex 3 :** 5,5 *points* - **Ex 4 :** 7 *points*